www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

INSTITUT SUPERIEUR DE GESTION CONCOURS D'ADMISSION DE 1989

M A T H E M A T I Q U E S I (Option économique)

DUREE 4 HEURES - COEFFICIENT : 5

L'EPREUVE SE COMPOSE DE QUATRE PROBLEMES INDEPENDANTS QUE LES CANDIDATS TRAITERONT DANS L'ORDRE DE LEUR CHOIX.

PROBLEME I.

Pour n entier naturel non nul, on définit la suite (S_n) par :

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^{1/3}} + \frac{1}{3^{1/3}} + \ldots + \frac{1}{n^{1/3}}$$

1°) Justifier pour k entier naturel non nul, l'encadrement :

$$\frac{1}{(k+1)^{1/3}} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^{1/3}} \leq \frac{1}{k^{1/3}}$$

lire $\frac{1}{(k+1)^{1/3}} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^{1/3}} \ldots$

2°) En déduire l'encadrement : $\int_1^{n+1} \frac{dx}{x^{1/3}} \leq S_n \leq \int_1^{n} \frac{dx}{x^{1/3}} + 1$

3°) Que peut-on dire de la suite S_n?

4°) A l'aide d'encadrements analogues, montrer que la suite (T_n) définie par :

$$T_n = 1 + \frac{1}{2^{4/3}} + \frac{1}{3^{4/3}} + \ldots + \frac{1}{n^{4/3}}$$

est convergente.

PROBLEME II.

1°) Soit f la fonction définie par : $f(0) = 1$; $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ pour $x \neq 0$

Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

2°) Etudier et représenter graphiquement la fonction f.
L'on justifiera :
- l'étude du signe de f'(x)
- la forme des branches infinies.

3°) Montrer que l'aire comprise entre la représentation graphique précédente et ses asymptotes est finie.

On ne demande pas le calcul de cette aire.

4°) a) Montrer que, pour u>0, les intégrales

$$J_u = \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^{ux} - 1}\, dx \quad \text{et} \quad K_u = \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^{ux} + 1}\, dx \quad \text{sont convergentes.}$$

b) Calculer J_u et K_u en fonction de J_1 et K_1

c) Etablir $J_1 - K_1 = 2J_2$

d) Déduire de ce qui précède une relation simple entre J_1 et K_1.

TSVP

PROBLEME III.

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de probabilité :

$$P[X_i = 0] = 1/6$$
$$P[X_i = 1] = 1/3$$
$$P[X_i = 2] = 1/2 \quad \text{pour } i = 1, 2.$$

On définit les nouvelles variables aléatoires : $S = X_1 + X_2$
$P = X_1 X_2$

1°) Déterminer la loi du couple (S, P)

2°) Déterminer les lois marginales de S et P.

Les variables aléatoires S et P sont-elles indépendantes?

3°) Calculer E(S), E(P), V(S), V(P), cov(S, P).

PROBLEME IV.

On admettra que pour $|x| < 1$ et $k \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} x^n = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$

Soit a un réel tel que $0 < a < 1$.

1°) Soit X une variable aléatoire à valeurs entières dont la loi est donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad P(X=n) = (1-a)a^n$$

a) Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.

b) Calculer l'espérance et la variance de X.

2°) Une urne contient des boules blanches et boules noires dans les proportions p et q, p + q = 1.

On effectue des tirages avec remise. Le nombre de tirages suit la loi de X.

Y est la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

a) Calculer pour tout entier k et n la probabilité conditionnelle

$P(Y=k/X=n)$ ainsi que $P(Y=k \cap X=n)$.

b) En déduire la loi de Y et calculer l'espérance de Y.

****

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail